Exercices Série 15

Soient les deux bases de $\mathbb{R}^2$ données par les vecteurs suivants :
$B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Et $B' = \left\{ \vec{b'}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

Calculez les matrices pour convertir un vecteur exprimé en base B vers B' et vice-versa.

Réponses

Pour ce faire, passons par la base canonique pour $B \to C \to B'$.

Ainsi,

$$(\vec{x})_C = A_B (\vec{x})_B = A_{B'} (\vec{x})_{B'}$$

Nous savons que A_B et $A_{B'}$ sont composées des vecteurs de leurs bases respectives en colonnes, donc

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $A_{B'} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

De plus, nous avons que

$$(\vec{x})_B = A_B^{-1} (\vec{x})_C = A_B^{-1} A_{B'} (\vec{x})_{B'} = A_{B' \to B} (\vec{x})_{B'}$$

Donc la matrice de conversion de $B' \to B$ est donnée par le produit matriciel $A_B^{-1} A_{B'}$.

Or

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de conversion

$$A_{B' \to B} = A_B^{-1} \times A_{B'} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & -0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

La matrice de $B \to B'$ est l'inverse de la matrice ci-dessus :

$$A_{B \to B'} = \frac{1}{68} \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons verifier que $A_{B \to B'} \times A_{B' \to B} = I$.